

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES CON ALUMNOS DE BAJO RENDIMIENTO ESCOLAR DE SÉPTIMO GRADOⁱ VIA MANIPULADORES VIRTUALES

Verónica Hoyos y Guadalupe Rodríguez
Universidad Pedagógica Nacional, México

Resumen

Se presentan resultados sobre el desarrollo del pensamiento algebraico de estudiantes de bajo rendimiento escolar en séptimo grado. Los estudiantes abordan la resolución de problemas matemáticos sobre generalización de patrones, en cuya resolución destaca la mediación de figuras construidas en ambientes virtuales de aprendizaje. Se llevaron a cabo dos fases de trabajo empírico diferenciado. En la primera se detectaron dificultades y estrategias de resolución con estudiantes de alto y de bajo rendimiento escolar trabajando sólo con papel y lápiz. En la última fase sólo intervienen subgrupos de estudiantes de bajo rendimiento escolar utilizando ahora manipuladores virtuales. Se destaca que trabajando con las herramientas digitales y siguiendo guías pedagógicas elaboradas para el efecto, los estudiantes de bajo rendimiento escolar avanzaron en la experimentación de acciones de abducción e inducción durante la resolución de los problemas mencionados.

Palabras clave: *Estudiantes de bajo rendimiento escolar, uso de manipulativos virtuales, razonamiento algebraico, generalización de patrones en algebra, visualización, acciones abductiva e inductiva.*

INTRODUCCIÓN

En el trabajo de Rivera (2010) en torno de la existencia de *plantillas visuales* que emergen en actividades de generalización de patrones con estudiantes de séptimo y de octavo grados (primero y segundo año después de la escuela primaria, i.e. 12-13 años de edad), se reportan 7 formas distintas en que los estudiantes de este nivel educativo desarrollan procesos de generalización algebraica. Sus resultados se derivan de la aplicación del trabajo de Giaquinto (2007) sobre el papel de la visualización en la cognición, en el montaje de un escenario de aprendizaje vinculado a la resolución de tareas de generalización de patrones con figuras. Una diferencia entre el trabajo de Rivera y el que aquí se presenta, es que en todo el trabajo de Rivera los estudiantes llevaron a cabo las actividades teniendo a la mano únicamente papel y

lápiz; en cambio aquí se utilizó en la segunda fase del trabajo empírico, y con los estudiantes de bajo rendimiento escolar, la funcionalidad proporcionada por herramientas de los manipuladores virtuales de la Universidad de Utah (<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>). En este trabajo se retoman entonces los resultados de Rivera (2010), y de Rivera y Becker (2008), para aplicarlos en una primera fase de trabajo empírico en donde en primera instancia se buscó identificar o reconocer las estrategias de resolución mas frecuentes de todos los estudiantes de un grupo regular de primer año de una de las secundarias técnicas del Distrito Federal, trabajando en tareas de generalización de patrones con figuras o patrones *figurales*, y utilizando solamente papel y lápiz. De esta primera fase se obtuvieron dos tipos distintos de resultados: estrategias de resolución de los problemas de generalización de patrones por parte de los estudiantes de alto rendimiento escolar, y, por otro lado la constatación de que en realidad cuando se resuelven en el salón de clase tareas como las que aquí nos ocupan y utilizando solamente papel y lápiz, los estudiantes de bajo rendimiento escolar normalmente quedan al margen de la actividad, sin recursos para resolver y a la espera de las iniciativas de los estudiantes más avanzados. Estos resultados sirvieron para abordar una segunda fase de trabajo de campo basada en la construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje para los estudiantes de bajo rendimiento escolar, utilizando para ello las estrategias de resolución de los estudiantes de alto rendimiento escolar obtenidas durante la primera fase, así como la utilización de manipulativos virtuales. Solamente los estudiantes de bajo rendimiento escolar participaron en la segunda fase del trabajo de campo del presente estudio, los cuales se pueden caracterizar por encontrarse normalmente en situaciones de desventaja en la escuela, ya sea por falta de desarrollo de habilidades, o de recursos adecuados para la resolución de tareas o problemas sobre el tema mencionado. En la comunicación que aquí se presenta se reportan sobre todo resultados de la segunda fase de trabajo empírico, fase durante la cual se lleva a cabo la instrumentación de un ciclo de enseñanza (Simon, 1995) sobre generalización de patrones con figuras (o patrones *figurales*), el cual se diseñó para su implementación con estudiantes de bajo rendimiento escolar, en clases de séptimo grado y/o primero de secundaria en México (de 12 a 13 años de edad aproximadamente). Se agrega entonces a la visualización de plantillas *figurales* propuesta por Rivera (2010), la manipulación digital de las mismas, lo que trae aparejado entonces ciertos elementos perceptivos así como el conteo de los elementos de los agrupamientos que las componen. Con estas herramientas y/o recursos se buscó promover el desarrollo de razonamiento algebraico en los estudiantes de séptimo grado de bajo rendimiento escolar, específicamente desencadenando acciones de abducción e inducción (base en los procesos de generalización) durante la resolución de tareas de generalización de patrones

figurales.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo con Mason y colaboradores (2005), una idea recomendable para iniciar a los estudiantes de secundaria al conocimiento del álgebra es que se haga a través de identificar un patrón en una sucesión de figuras (o números), para después avanzar hacia la comunicación y registro de las características comunes que se perciban o de las relaciones que se hubieran podido establecer inicialmente a partir de ejemplos particulares. Mason argumenta que de ahí pueden emerger preguntas matemáticas específicas, como por ejemplo: ¿habrá alguna fórmula que defina a este patrón? Asimismo, estos autores establecen que una vez acordado lo que define al patrón, las regularidades y las relaciones entre sus componentes se deben traducir de un lenguaje natural hacia una regla o fórmula general, la cual entonces resultará de una evolución cognitiva del estudiante. Tal transición, continúan estos autores, no es un ejercicio cognitivo simple; sin embargo, puede ser apoyada por dibujos, esquemas o palabras que lleven posteriormente a describir las variables clave en el problema, para finalmente avanzar al logro de su expresión en forma simbólica (Mason et al., 2005).

Por otro lado, en la investigación de Rivera (2010, p. 300) se encuentra que “una generalización de patrones significativa involucra la coordinación de dos acciones inter-dependientes: (1) la acción abductiva-inductiva sobre los objetos, la cual involucra el empleo de diferentes maneras de contar y de estructurar los objetos discretos o las partes de un patrón en una manera algebraicamente útil; y (2) la acción simbólica, la cual involucra trasladar (1) a la forma de una generalización algebraica. La idea detrás de la *acción abductiva-inductiva* está ilustrada en la Fig.5. [Ahí se muestra] un diagrama de fases en la generalización de patrones, el cual se verificó empíricamente. Se extrajo de una cohorte de estudiantes de sexto grado, quienes participaron en un estudio [de enseñanza] constructivista sobre la generalización de patrones llevado a cabo durante dos años (Rivera & Becker, 2008)ⁱⁱ.” En la siguiente Fig.1. se reproduce la llamada “Fig. 5” en el trabajo de Rivera (2010).

METODOLOGIA

En este trabajo interesa reportar la instrumentación de un ciclo de enseñanza (Simon, 1995) en torno de la generalización de patrones con figuras, el cual se llevó a cabo con estudiantes de séptimo grado (de 12 a 13 años de edad) de bajo rendimiento escolar. En acuerdo con Simon, el modelo de ciclos de enseñanza concreta una pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista. Los ciclos de enseñanza modelan la toma de decisiones del profesor

con base en el diseño de tareas matemáticas. Su parte medular consiste en “una tensión creativa entre los objetivos del profesor con respecto al aprendizaje del estudiante y la responsabilidad de ser susceptible y sensible al pensamiento matemático de los estudiantes”.

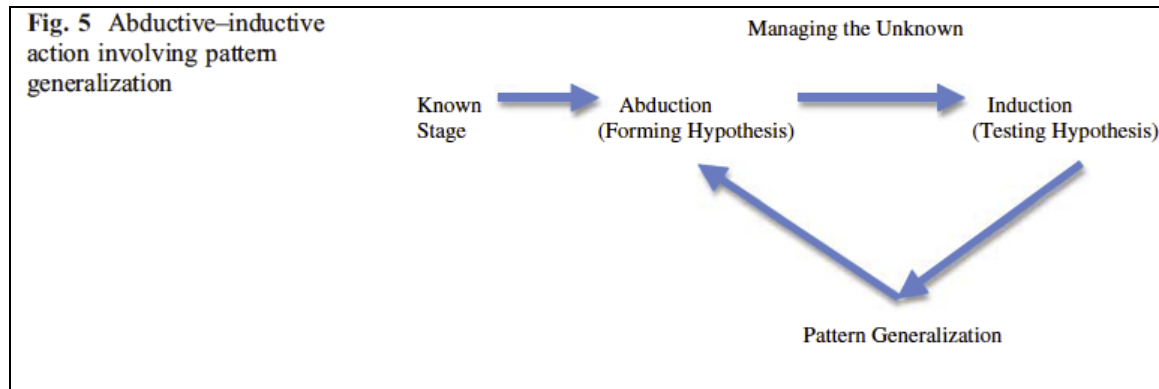


Fig. 1. Se muestra una copia del diagrama de fases en la generalización de patrones, considerado en el trabajo de Rivera (2010, p.300).

En el ciclo de enseñanza que aquí se construyó: (i) se partió de indagar, en una primera fase de trabajo empírica y diagnóstica, las estrategias de resolución de los estudiantes en torno de ciertos problemas o tareas de interés; (ii) se planificó una serie de actividades y se diseñaron guías para abordar el tema de generalización de patrones únicamente con estudiantes de bajo rendimiento escolar; (iii) se seleccionaron tareas apropiadas para instrumentar un escenario de aprendizaje virtual que se basara en la construcción y manipulación de patrones con figuras o patrones *figurales* (ver Giaquinto, 2007; Rivera 2010), así como en el reconocimiento de ciertas plantillas visuales asociadas (Rivera, 2010); (iv) finalmente, se instrumentó una segunda fase de trabajo empírico basada en el diseño e instrumentación de guías o planes pedagógicos apropiados para los estudiantes menos aventajados, y en el uso de manipulativos virtuales. Es importante hacer notar que las guías que se diseñaron incorporaron la utilización de dispositivos digitales en el aula, y fueron la expresión concreta de la concepción de una trayectoria hipotética de aprendizaje que permitiera trabajar con los estudiantes de bajo rendimiento escolar en la resolución de las tareas de generalización ya mencionadas. En la primera fase del estudio participaron los 47 alumnos de todo un grupo de primero de secundaria, quienes resolvieron tareas de generalización de patrones en ambiente de lápiz y papel y en donde destacaron las estrategias de resolución instrumentadas por los de estudiantes de alto rendimiento escolar. Posteriormente, en la última fase del trabajo empírico participaron 105 estudiantes de bajo rendimiento académico pertenecientes a diferentes grupos de varias secundarias técnicas participantes, con ellos fue con

los que se utilizó el ambiente virtual de aprendizaje. Todos los alumnos que participaron en el estudio estaban en séptimo grado y sus edades oscilaron entre 12 y 13 años.

Los manipulativos virtuales de la Universidad de Utah (ver <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>) ofrecieron la facilidad de reproducir los patrones *figurales* diseñados en las guías pedagógicas. Además, estos manipulativos permitieron mover las piezas para contarlas, así como cambiar el color a subconjuntos de elementos de las figuras dadas.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En la primera fase, o fase diagnóstica del trabajo empírico, se observó que el uso del color para distinguir conjuntos de elementos en una figura (por ejemplo, azulejos en una misma pila) fue una de las estrategias más usadas por los estudiantes de alto rendimiento en el ambiente de lápiz y papel.

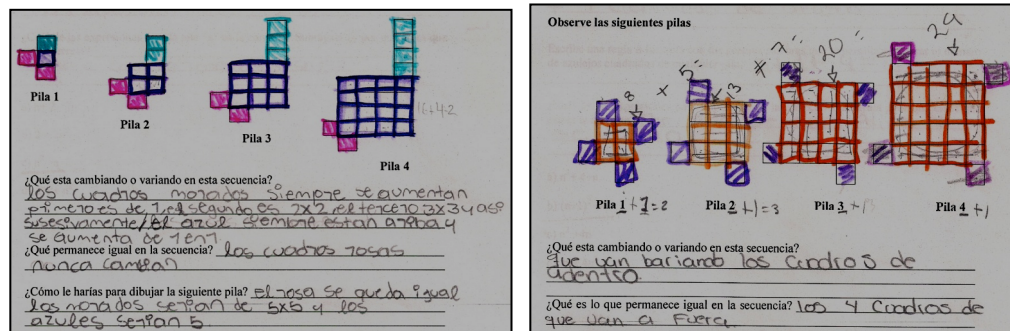


Fig. 2. Imágenes de lo elaborado por los estudiantes de alto rendimiento escolar en ambiente de papel y lápiz. Obsérvese la utilización de colores para resaltar diferentes partes del patrón *figural*.

Esta fue, por ejemplo, una de las estrategias que se aprovecharon en el diseño de las guías de trabajo a utilizar en la segunda fase del trabajo empírico, pues el manipulativo digital permite utilizar un contador digital para saber cuál es el número de piezas que aparecen en los subgrupos particulares que se elijan en cada una de las figuras del patrón. Tener a la vista el contador del número de elementos que conforman a cada subgrupo de elementos en cada figura, facilitó que los alumnos de bajo rendimiento escolar reconocieran o identificaran relaciones entre el número de la figura y las *unidades de medida* previamente determinadas. De hecho esta estrategia de resolución fue inicialmente sugerida en las guías de trabajo a los estudiantes de bajo rendimiento escolar, y ellos posteriormente la utilizaron de manera sistemática a lo largo de su resolución.

Por ejemplo, en la Fig. 2. aparecen varias pantallas que muestran el espacio de trabajo virtual con uno de los manipulativos elaborados por la Universidad de Utah para el estudio del Álgebra: el denominado, *Bloques de patrones*. Se puede ver que en la primera imagen aparece una pila de “azulejos cuadrados (pila 2)”. También aparece un recuadro hecho simplemente haciendo clic a

un lado de la figura y, sin soltar, se arrastra el ratón en el espacio de trabajo para formar el mencionado recuadro. Obsérvese que en la primera figura aparece un cero en la esquina superior derecha del recuadro (este número, es de hecho el contador de los elementos que son introducidos en el recuadro, lo cual, en el caso de la primera figura, es cero). En la segunda imagen se ha arrastrado toda la pila al interior del recuadro, y aparece entonces en el contador el número ocho. Finalmente, en la tercera imagen se muestra que únicamente se han dejado dos elementos de la pila dentro del recuadro.

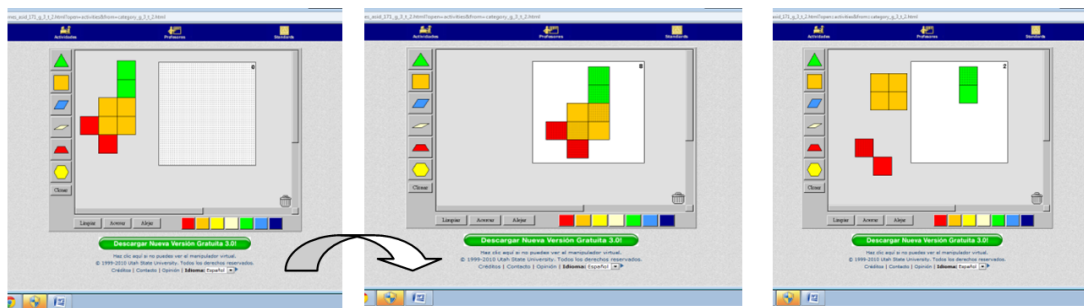


Fig. 3. Pantallas que muestran el espacio de trabajo denominado *Bloques de Patrones*, de los manipulativos virtuales de la Universidad de Utah (ver <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>).

Además de las facilidades que proporcionó el conteo de los elementos de las figuras, también se utilizó otra herramienta de los manipulativos, la cual permite colorear de manera distinguida las diferentes partes de las figuras, y por lo tanto permite distinguir de manera conveniente subgrupos de elementos (o *unidades*) en las figuras. Sin duda, fue el diseño de las guías lo que facilitó el desarrollo de las actividades en el aula, y, sobre todo, que los estudiantes de bajo rendimiento escolar pudieran experimentar y/o llegar a instrumentar y/o reproducir una estrategia de asociación de la *unidad de medida* con el número de la figura en cuestión, fundamental en la resolución de las tareas de generalización.

De esta manera, en general se encontró que los estudiantes de bajo rendimiento escolar pudieron recrear 6 de los 7 tipos de generalización algebraica reportados previamente por Rivera (2010). Asimismo, usando la terminología de este autor, las estrategias más frecuentemente desarrolladas por los estudiantes fueron la multiplicativa constructiva estándar y la multiplicativa constructiva no estándar. Los otros tipos de estrategias que se encontraron fueron, en orden de frecuencia, la aditiva constructiva no estándar, la deconstructiva, la aditiva constructiva estándar, y la basada en una transformación constructiva o deconstructiva. Como Rivera y Becker establecieron, los individuos tienden a ver los patrones de manera diferente y esto depende de cómo se conceptualizan

las *unidades de medida* (Rivera & Becker 2008). Por ejemplo, nótese el modelo del tipo de visualización estándar constructivo-multiplicativo que aparece en la Fig. 4.

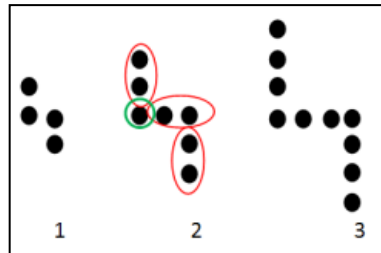


Fig. 4. Una copia de la visualización de Joey, considerada en el trabajo de Rivera (2010, p. 309) para la obtención de la fórmula $C = 3n + 1$.

Es importante hacer notar que en el estudio que aquí se presenta se diseñaron actividades ligeramente distintas a las utilizadas por Rivera, sobre todo por la necesidad de recrear las actividades de generalización vía la utilización de los manipulativos virtuales. Por ejemplo, una de las actividades más productivas fue la relacionada con la generalización del patrón *figural* que enseguida se muestra en la Fig.5, el denominado, *pila de azulejos cuadrados*.

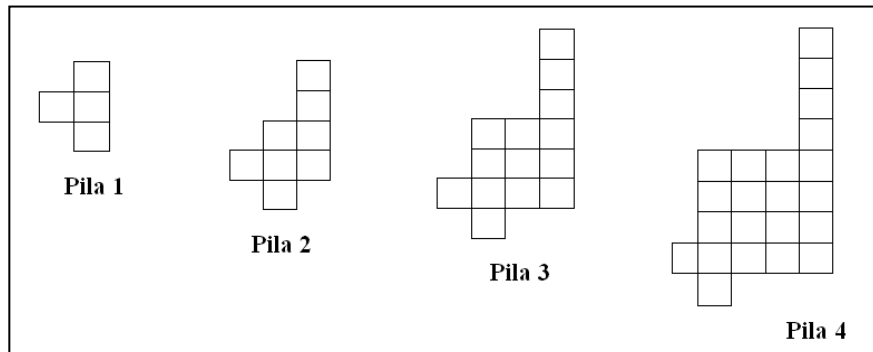


Fig. 5. Patrón *figural* denominado *pila de azulejos cuadrados* (Rodríguez, 2015).

Como antes ya se mencionó, la actividad de los estudiantes de bajo rendimiento escolar en el ambiente de manipulación virtual se basó en una utilización sistemática de la funcionalidad de las herramientas del ambiente digital y ello se concretó en el seguimiento de guías *pedagógicas* según las cuales los estudiantes responderían a una serie de preguntas de las del tipo de Mason y colaboradores (2005). Dichas preguntas se planteaban sucesivamente para llegar a responder una pregunta clave en este tipo de actividad (Mason et al. 2005): ¿Cómo se puede saber cuál es el número de azulejos cuadrados contenidos en cualquiera de las figuras o *pilas* de este patrón?

Con respecto a las respuestas de los estudiantes de bajo rendimiento escolar de las preguntas mencionadas como clave en la generalización de patrones, específicamente se observó que pudieron transitar por los dos principales tipos de acciones mencionados previamente por Rivera (2010, p. 300), a saber, la acción abductiva-inductiva sobre los objetos y la acción simbólica, conformándose entonces un ciclo significativo de generalización de patrones. Específicamente, las guías pedagógicas se utilizaron con los estudiantes de bajo rendimiento escolar para presentarles las tareas a resolver con distintas imágenes (ver las *pilas de azulejos cuadrados* que aparecen en la Fig. 5), de tal manera que éstas formaran parte de un patrón *figural*. Los estudiantes procedieron entonces, en primer término, a reproducir en el manipulador virtual las figuras dadas. De hecho, la reproducción en el ambiente digital de las figuras del patrón, su manipulación para el conteo, la visualización respectiva de subconjuntos coloreados y de los dígitos del número de elementos correspondiente junto con el número de la figura en cuestión, fueron en conjunto las acciones que desencadenaron la exploración, por parte de los estudiantes de bajo rendimiento escolar, de un patrón general subyacente a todas y a cada una de las figuras en un mismo patrón *figural*.

Esto es, se constató con los estudiantes de bajo rendimiento escolar que la simple reproducción en el ambiente digital del patrón *figural* dado en el enunciado de la tarea, implicó un reconocimiento de la estructura común que guarda la configuración del patrón. Ello involucró visualizar el número de elementos que permanecía constante en cada estado, así como identificar cuáles eran los elementos o partes de la figura que sufrían cambios. Por otro lado, la acción de reproducir las cuatro primeras figuras requería contar los elementos que las conformaban, así como considerar diferentes o posibles agrupamientos de sus *unidades*. Por ejemplo, véase en la Fig. 6. algunas de las imágenes de la resolución de estos estudiantes a la tarea de generalización en uno de los patrones *figurales*. Obsérvese el reconocimiento de la estructura del patrón *figural*, así como el conteo de los elementos en cada uno de los estados de las figuras del diagrama.

En la secuencia de la actividad, después de la reproducción de las figuras en el ambiente digital se les pidió a los estudiantes avanzar en la resolución de las tareas de generalización (Mason et al. 1985). Para ello se construyeron con el manipulativo virtual algunas de las pilas subsecuentes, y otras más lejanas. Esto les permitió a los estudiantes expresar un procedimiento general de cómo construir cualquier figura del patrón.

En otro ejemplo de las respuestas de los estudiantes a las guías pedagógicas (ver Fig. 7), se pueden observar algunas de sus respuestas a las preguntas relativas a la descripción del número de elementos de la quinta figura de un determinado patrón *figural*; o también su respuesta a cómo harían el dibujo de una figura puesta en el lugar 18avo del patrón en cuestión.

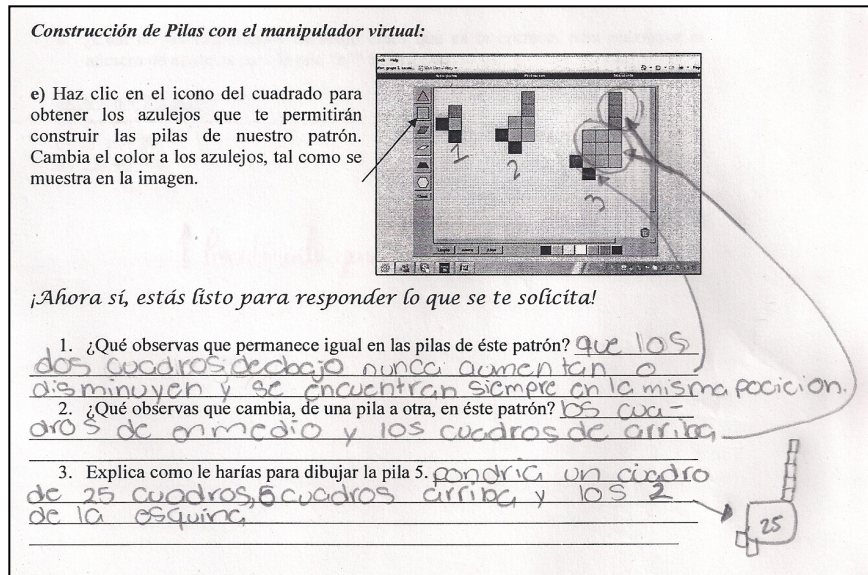


Fig. 6. Utilización del manipulador virtual, por parte de los estudiantes de bajo rendimiento escolar, para la reproducción de las figuras o elementos de un patrón *figural* (Rodríguez, 2015).

Es de notar que la mayoría de los estudiantes de bajo rendimiento escolar utilizaron en su resolución la estrategia de determinar una unidad de medida asociada con el número de la figura correspondiente de manera progresiva. En otras palabras, sucedió que en el ejemplo de la tarea cuyo segmento aparece en las Fig. 6 y Fig. 7, ellos visualizaron cualquier figura del patrón en tres subconjuntos, para así determinar la cantidad de azulejos que cualquier figura en construcción podría requerir. Se puede observar que el primer subconjunto está formado por los elementos que forman un cuadrado central, el cual tiene por medida de lado el número de la figura en cuestión. Por ejemplo, si la figura es la número 4, entonces el cuadrado central tendrá como medida de lado cuatro azulejos lo cual hace que la figura cuadrada esté conformada por 16 azulejos. El segundo

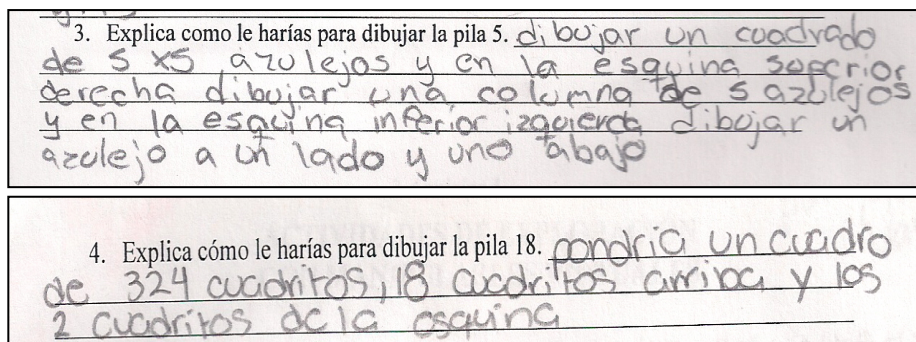


Fig.7. Ejemplo de respuestas de los estudiantes a las preguntas en las guías pedagógicas.

subconjunto es una columna de elementos que se levantan sobre la esquina superior derecha del cuadrado central, la cantidad de elementos que la conforman también se determina por el número de figura en cuestión. Refiriéndonos a la misma cuarta figura, esta columna tendría 4 azulejos. Estos dos conjuntos representan los elementos cambiantes en las figuras del patrón. El tercer subconjunto considerado por los estudiantes, correspondió a lo que permanece igual, o que es constante en el patrón. En el caso de la figura en cuestión, fueron dos azulejos ubicados en la esquina inferior izquierda de la figura.

A continuación, en la Fig.8., se muestra el trabajo realizado por los estudiantes de bajo rendimiento escolar en la reproducción de las primeras figuras del patrón figural hasta aquí comentado (el patrón de *pilas de azulejos cuadrados*), para comprender la descripción de la partición de la figura en subconjuntos, y el conteo de sus elementos. Las imágenes muestran algunas de las ejecuciones de los estudiantes con el manipulativo virtual.

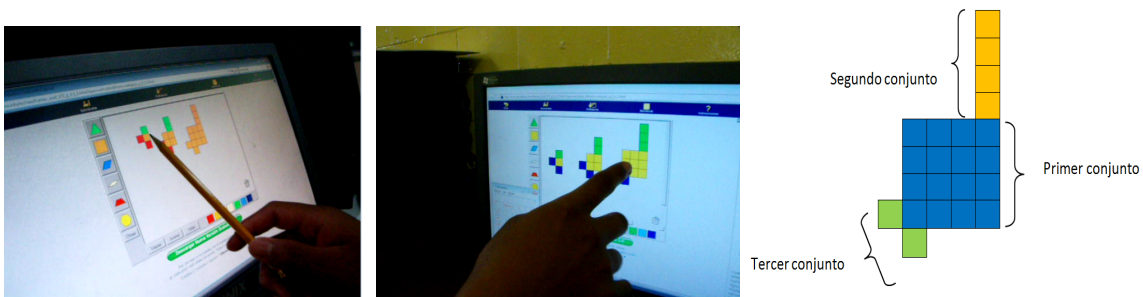


Fig. 8. Ejecuciones de los estudiantes de bajo rendimiento escolar usando el manipulativo virtual de *Bloques de patrones* (ver <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>)

En síntesis, con ayuda de las funcionalidades del manipulativo virtual, y de las guías pedagógicas elaboradas, los estudiantes de bajo rendimiento escolar pudieron establecer hipótesis acerca del número de elementos que conformaban a figuras que no aparecían en la serie de figuras dadas (acción abductiva en el proceso de generalización, de acuerdo con Rivera 2010), y pudieron avanzar en la prueba o confirmación de sus hipótesis (realización de acciones de tipo inductivo, de acuerdo con Rivera 2010), de tal manera que pudieron avanzar en la confirmación de la validez de una regla o procedimiento de definición del patrón (Rivera, 2010). De acuerdo con Rivera, la experimentación de ambos tipos de acciones forman parte del proceso de generalización de patrones figural, vía la visualización de las plantillas figural convenientes, y según las propias estrategias de resolución que decidan los estudiantes llevar a cabo.

CONCLUSIONES

A partir de la generación de un ciclo completo de enseñanza (Simon, 1995) en torno del tema de generalización de patrones figurales, que se elaboró para su instrumentación en el salón de clase con estudiantes de bajo rendimiento escolar de primer año de secundaria, se llevó a cabo un trabajo de investigación empírica a profundidad, el cual constó de dos fases, y cuyo diseño se basó en trabajos antecedentes de investigación sobre el tema de Mason et al. (2005), de Rivera (2010), y de Rivera & Becker (2008).

En la primera fase de trabajo empírico se constató que cuando se resuelven en el salón de clase tareas de generalización de patrones utilizando solamente papel y lápiz, los estudiantes de bajo rendimiento escolar se quedaron al margen de la actividad, sin recursos para resolver y a la espera de las iniciativas de los estudiantes más avanzados. Para la segunda fase de trabajo empírico se construyó entonces una trayectoria hipotética de aprendizaje, materializada en el diseño de guías pedagógicas, la cual sirvió para que los estudiantes de bajo rendimiento escolar pudieran resolver las tareas de generalización, vía la utilización de algunas de las herramientas disponibles en los manipulativos virtuales de la Universidad de Utah. Esto permitió que este tipo de estudiantes pudieran llegar a experimentar y/o instrumentar estrategias de resolución en torno de las tareas propuestas, similares a las ejecutadas por los estudiantes avanzados. Por ejemplo, con el manipulativo virtual de *Bloques de Patrones* los estudiantes de bajo rendimiento escolar pudieron llegar a reconocer la estructura del patrón *figural*, coloreando diferentes partes de la serie de figuras dadas para identificar una unidad de medida, así como utilizar el contador digital del manipulativo, el cual les permitía conocer el número de los elementos de los diferentes subconjuntos seleccionados, y eso en cada uno de los estados de las figuras del diagrama.

Todos los estudiantes que participaron en el estudio privilegiaron la asociación de una *unidad de medida* con el número de la figura (Rivera 2010; Rodríguez 2015), y pudieron avanzar en el establecimiento de hipótesis y en la prueba o verificación de las mismas. Es decir que en efecto los estudiantes evidenciaron la realización de acciones del tipo abductivo e inductivo, base del proceso de generalización (cf. Rivera 2010), y ello específicamente en relación al establecimiento del número de elementos de cualquiera de las figuras y utilizando los patrones figurales dados (Rodríguez, 2015). En general, la orquestación del ciclo de enseñanza a lo largo de las dos fases de trabajo empírico, y en particular a partir de la utilización de las guías pedagógicas (manifestación concreta de la trayectoria hipotética de aprendizaje específicamente diseñada para el efecto), y de la utilización de los manipulativos virtuales por parte de los estudiantes de bajo rendimiento escolar, permitió que la mayoría de los estudiantes alcanzaran la explicitación de una

formula algebraica subyacente al patrón figural en cuestión. Es más, con los estudiantes que no llegaron a una explicitación simbólica de la regla subyacente en la composición del patrón figural, también se avanzó hacia una formulación de una regla expresada de manera sincopada, i.e., en términos de una expresión combinación de lenguaje algebraico y natural de las configuraciones en juego (para más detalles ver Rodríguez, 2015).

REFERENCIAS

- Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. United Kingdom: Oxford University Press.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. Great Britain: The Open University & SAGE.
- Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 297-328.
- Rivera, F. & Becker, J. (Eds.) (2008). From patterns to algebra. *ZDM*, 40 (1).
- Rodríguez, G. (2015). Desarrollo del razonamiento algebraico con estudiantes de bajo rendimiento escolar en primero de secundaria, en tareas de generalización de patrones mediante la utilización de visualización y conteo con manipulativos virtuales. Tesis de Doctorado en Educación. Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy From a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.
- Library of Virtual Manipulatives of the University of Utah: <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>. Retrieved on January 14, 2014.

ⁱ Es decir, alumnos de entre 12 o 13 años de edad, quienes cursan en México el primero de secundaria.

ⁱⁱ La cita, originalmente en inglés, es la siguiente: <<meaningful pattern generalization involves the coordination of two interdependent actions, as follows: (1) *abductive-inductive action on objects*, which involves employing different ways of counting and structuring discrete objects or parts in a pattern in a algebraically useful manner; and (2) *symbolic action*, which involves translating (1) in the form of an algebraic generalization. The idea behind *abductive-inductive action* is illustrated in Fig.5. It is an empirically verified diagram of phases in pattern generalization that I have drawn from a cohort of sixth-grade students who participated in a constructivist-driven pattern generalization study for two consecutive years (Rivera & Becker, 2008). >>